基于支链力学模型的冗余/非冗余过约束2R1T并联机构刚度性能对比分析

徐郑和* 杨高炜 卢昌亨 贾富淳 蒙建国 王少锋
内蒙古科技大学机械工程学院,包头,014010

摘要:将冗余/非冗余驱动过约束并联机构2RPU/2UPR和2RPU/UPR进行对比分析。首先基于加权广义逆对机构支链的力学性能进行分析,得到支链在给定工作空间内的力学性能分布状况;然后提出一种离散界面点位置的动态力学性能仿真方法用于模拟移动副的运动过程,并与理论分析进行相互验证;最后基于上述力学分析结果,通过支链薄弱环节对两机构的刚度性能进行对比分析,得到冗余支链在受到不同方向外载荷时对机构形变的抵抗作用并判断支链约束的合理性,为后续高刚度样机的研制提供了方向。

关键词:冗余驱动;2R1T并联机构;力学性能;刚度分析
中图分类号:TH112
DOI:10.3969/j.issn.1004-132X.2026.08.010 **开放科学(资源服务)标识码(OSID)**:

Comparative Analysis of Stiffness Properties of Redundant/Non-redundant Over-constrained 2R1T PMs Based on the Mechanical Models of Limbs

XU Zhenghe* YANG Gaowei LU Changheng JIA Fuchun MENG Jianguo WANG Shaofeng
School of Mechanical Engineering, Inner Mongolia University of Science & Technology, Baotou, Inner Mongolia, 014010

Abstract: This paper presents a comparative stiffness performance analysis of two over-constrained parallel mechanisms (PMs) with redundant and non-redundant actuation, namely the 2RPU/2UPR and 2RPU/UPR configurations. First, the mechanical properties of the mechanism limbs are analyzed using the weighted generalized inverse method, yielding the distribution of limb forces within the prescribed workspace. Second, a simulation method for the dynamic mechanical properties at discrete interface point positions is proposed to emulate the motion of translational pairs, and the simulation results are mutually validated with theoretical analysis. Finally, based on the above findings, a comparative stiffness analysis of the two mechanisms is conducted from the perspective of the weakest limb components. The resistance and force conditions of the redundant limbs under external loads in different directions are obtained, providing guidance for the development of high-stiffness prototype structures.

Key words: redundant actuation; 2R1T parallel mechanism; mechanical property; stiffness analysis

0 引言

近年来,高端制造业备受关注[1],工业机器人迅速发展。与传统串联机器人相比,并联机构在机器人刚度与加工精度方面具备更好的应用潜能[2-3]。目前,2R1T三自由度并联机构运用十分广泛[4],如EXECHON公司以2UPR/SPR并联机构为设计基础研制的LINKS-EXE700混联加工中心[5-6],天津大学与燕山大学分别基于R(2RPR&RP)/UPS[7-8]及2RPU/UPR[9]并联机构设计的五自由度混联机器人。上述2R1T并联机构均属于被动过约束机构,部分机构在力学和刚度性能方面表现优异。冗余驱动并联机构在机构中配置冗余支链,其刚度性能在理论方面具备更好的潜能。浙江理工大学提出Vex4冗余驱动并联机构2UPR/2RPU[10],燕山大学基于多冗余驱动并联机构2UPR/2RPU/RPR建立动力学模型[11]。李永泉等[12]提出一种冗余驱动2R1T并联机构构型方法,得到多款冗余驱动2R1T并联机构。

过约束并联机构的力学性能分析属超静定问题,冗余驱动并联机构的力学模型的建立涉及驱动力的优化分配问题,其力学模型的求解过程较为复杂。GOGU[13]通过Newton-Euler法建立2UPR/SPR并联机构的变形协调方程,用于构建机构力学模型。赵雅聪等[14]运用对接节点坐标法对FAST馈源支撑系统的牵引并联机构进行动力学计算。孙鹏等[15]基于虚功原理建立3-RPR力学模型。XU等[16]通过简化并联机构力学模型,

收稿日期:2025-06-27
基金项目:内蒙古自治区自然科学基金(2023QN05007)

基于加权广义逆矩阵分析并联机构的受力问题，并运用ANSYS-ADAMS构造仿真模型分析机构力学性能，该方法适用于只存在转动副的机构。

过约束并联机构的刚度模型是建立在力学模型的基础之上的，目前，基于结构刚度并联机构刚度分析的过程基本可归纳为考虑支链各单元实际结构刚度建立整体刚度矩阵[17-18]，基于刚度矩阵求解各方向刚度及形变量[19-20]建立刚度矩阵的过程需以机械结构及具体尺寸为参数，不能将问题前置。

本文基于加权广义逆的方法对冗余/非冗余驱动并联机构2RPU/2UPR和2RPU/UPR进行力学性能的理论分析与仿真验证，并基于支链力学模型对机构刚度进行对比分析。

1 典型并联机构力学性能分析

1.1 典型2R1T冗余/非冗余驱动并联机构介绍

典型2R1T并联机构2RPU/2UPR构型如图1所示，该机构由动、定平台及四条支链组成，每条支链均由上、下连杆构成，机构以支链P副作为驱动，构成驱动冗余。机构在初始位置下，动、定平台相互平行，两RPU支链在OX轴方向处于对称状态，两UPR支链在OY轴方向处于对称状态。该机构中，两RPU支链分别给动平台提供两约束力$\$^{r}_{11}$与$\$^{r}_{21}$、两约束力偶$\$^{r}_{12}$与$\$^{r}_{22}$，两UPR支链分别给动平台提供两约束力$\$^{r}_{31}$与$\$^{r}_{41}$、两约束力偶$\$^{r}_{32}$与$\$^{r}_{42}$，支链给动平台提供约束数目大于机构自由度(2R1T)所需约束，形成过约束。

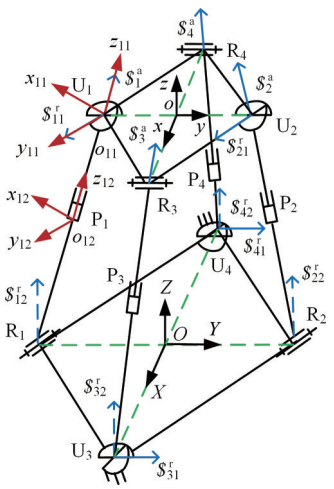


图1 2RPU/2UPR并联机构

Fig.1 2RPU/2UPR PM

非冗余驱动2R1T并联机构2RPU/UPR如图2所示，该机构与2RPU/2UPR并联机构相比减少了一个UPR支链，其余配置及运动方式均相同，该机构也为过约束机构。

两款并联机构均具有两条连续转轴，一条转轴为绕定平台转动的OX轴，另一条为绕动平台转动的oy轴，绕两条转轴的转动分别用于调整动平台位置和姿态，转角分别为α和β。支链$R_1P_1U_1$末端坐标系为$o_{11}x_{11}y_{11}z_{11}$，其中$o_{11}z_{11}$沿$R_1P_1U_1$方向，$o_{11}y_{11}$垂直于$R_1U_1U_2R_2$所在平面，$o_{11}x_{11}$符合右手坐标系，其余支链末端坐标系的建立方法与支链$R_1P_1U_1$一致。

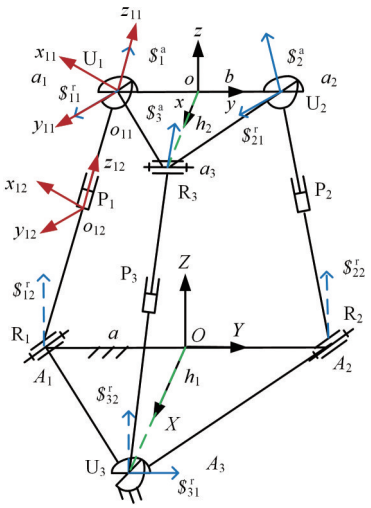


图2 2RPU/UPR并联机构

Fig.2 2RPU/UPR PM

1.2 冗余/非冗余驱动并联机构力学性能分析

本节基于加权广义逆的方法，不考虑支链重力的影响求解典型2R1T冗余/非冗余驱动并联机构的力学性能。利用并联机构各支链形变与约束螺旋幅值间的映射关系求解支链刚度矩阵，基于动平台在外载荷条件下微位移与支链形变间的变形协调关系构造机构整体刚度矩阵，然后根据加权矩阵$\boldsymbol{W}$求解各支链驱动力、约束力/力偶幅值。

以支链$R_1P_1U_1$为例，支链驱动力在末端坐标系$o_{11}x_{11}y_{11}z_{11}$下驱动力$\$^{a}_{1}$、约束力$\$^{r}_{11}$与约束力偶$\$^{r}_{12}$螺旋可表示为

$$\left.\begin{aligned}\$^{a}_{1}&=f_{a,1}[0\quad 0\quad 1\ ;\ 0\quad 0\quad 0]\\ \$^{r}_{11}&=f_{r,1}[0\quad 1\quad 0\ ;\ 0\quad 0\quad 0]\\ \$^{r}_{12}&=m_{r,1}[0\quad 0\quad 0\ ;\ ac\alpha-b\quad 0\quad Z/c\alpha+as\alpha]/l_1\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

其中，$f_{a,1}$、$f_{r,1}$、$m_{r,1}$分别表示各力螺旋幅值，其方向如图1所示，$c\alpha$表示$\cos\alpha$，$s\alpha$表示$\sin\alpha$。l_1表示该支链长度，a、b分别表示定平台转动副R_1与R_2间一半的距离及动平台虎克铰U_1与U_2一半的距离。则支链$U_1P_1R_1$在$OXYZ$坐标系下驱动力$\$^{Or}_{a1}$、约束力$\$^{Or}_{11}$与约束力偶$\$^{Or}_{12}$螺旋可表示为

$$\left.\begin{aligned}\$^{Or}_{a1}&=(0\quad -bc\alpha-Zt\alpha+a\quad -bs\alpha+Z;\\ &\quad abs\alpha-aZ\quad 0\quad 0)/l_1\\ \$^{Or}_{11}&=(1\quad 0\quad 0\ ;\ 0\quad -bs\alpha+Z\quad bc\alpha+Zt\alpha)\\ \$^{Or}_{12}&=(0\quad 0\quad 0\ ;\ 0\quad -s\alpha\quad c\alpha)\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

式中：t α表示tan α。

则支链力螺旋刚度矩阵为

$$\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{C}_1^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{l_1}{EA_1} & & \\ & \dfrac{l_1^3}{3EI_1} & \dfrac{-l_1(P)}{2EI_1''} \\ & \dfrac{-l_1(P)}{2EI_1''} & \dfrac{(-P)^2}{l_1EI_1'}+\dfrac{(Q)^2}{l_1GI_{p1}}\end{bmatrix}^{-1} \tag{3}$$

$$P=ac\ \alpha-b \qquad Q=Z/c\ \alpha-as\ \alpha$$

$$A_1=A_{11}A_{12}l_1/(l_{11}A_{12}+l_{12}A_{11})$$

$$I_{P1}=I_{P11}I_{P12}l_1/(l_{11}I_{P12}+l_{12}I_{P11})$$

式中：E为连杆弹性模量；A_{12}、A_{11}分别为支链$U_1P_1R_1$上、下连杆横截面面积；l_{12}、l_{11}分别为支链$U_1P_1R_1$上、下连杆当前位姿状态下的长度；I_{P12}、I_{P11}分别为上、下连杆横截面对原点o_{11}、o_{12}的极惯性矩。

中间参数I_1、I_1'与I_1''分别为

$$\left.\begin{aligned}I_1&=I_{11}I_{12}l^3/(l_{12}I_{11}+(l_{11}^3+3l_{11}^2l_{12}+3l_{12}^2l_{11})I_{12})\\ I_1'&=I_{11}I_{12}l/(l_{12}I_{11}+l_{11}I_{12})\\ I_1''&=I_{11}I_{12}l^2/(l_{12}^2I_{11}+(l_{11}^2+2l_{11}l_{12})I_{12})\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

式中：I_{12}、I_{11}分别为上、下连杆相对于R_i副轴线的惯性矩。

同理，可求解支链$U_2P_2R_2$、$U_3P_3R_3$及$U_4P_4R_4$分别在其末端坐标系下及$OXYZ$坐标系下的约束螺旋及其刚度矩阵$\boldsymbol{K}_2$、$\boldsymbol{K}_3$、$\boldsymbol{K}_4$，机构加权因子可表示为

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{K}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_1 & & & \\ & \boldsymbol{K}_2 & & \\ & & \boldsymbol{K}_3 & \\ & & & \boldsymbol{K}_4\end{bmatrix}^{-1} \tag{5}$$

驱动力映射矩阵可表示为

$$\boldsymbol{G}_f^F=\begin{pmatrix}\$_{a1}^{Or} & \$_{a2}^{Or} & \$_{a3}^{Or} & \$_{a4}^{Or}\end{pmatrix} \tag{6}$$

式中：$\$_{a2}^{Or}$、$\$_{a3}^{Or}$、$\$_{a4}^{Or}$分别为支链$U_2P_2R_2$、$R_3P_3U_3$与$R_4P_4U_4$在$OXYZ$坐标系下的驱动力螺旋。

则各支链驱动力可表示为

$$\boldsymbol{f}=(f_{a,1}\quad f_{a,2}\quad f_{a,3}\quad f_{a,4})=\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{G}_f^F)^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{G}_f^F\boldsymbol{I}^{-1}(\boldsymbol{G}_f^F)^{\mathrm{T}})^{-1}\$_F \tag{7}$$

式中：$f_{a,2}$、$f_{a,3}$、$f_{a,4}$分别为上述支链驱动力幅值；$\boldsymbol{I}$为单位矩阵；$\$_F$为动平台外载荷。

各支链约束力螺旋可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{f}^Q=(&f_{a,1}\quad f_{r,1}\quad m_{r,1}\quad f_{a,2}\quad f_{r,2}\quad m_{r,2}\quad f_{a,3}\quad f_{r,3}\quad m_{r,3}\\ &f_{a,4}\quad f_{r,4}\quad m_{r,4})=\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{G}_f^F)^{\mathrm{T}}((\boldsymbol{G}_f^F\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{G}_f^F)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\cdot\\ &(\boldsymbol{G}_f^F\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{G}_f^F)^{\mathrm{T}})^{-1})^{-1}(\boldsymbol{G}_f^F\boldsymbol{W}^{-1}(\boldsymbol{G}_f^F)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\$_F)\end{aligned} \tag{8}$$

式中：$f_{r,2}$、$m_{r,2}$分别为支链$R_2P_2U_2$约束力和约束力偶幅值；$f_{r,3}$、$m_{r,3}$分别为支链$U_3P_3R_3$约束力和约束力偶幅值；$f_{r,4}$、$m_{r,4}$分别为支链$U_4P_4R_4$约束力和约束力偶幅值。

1.3　数值算例

通过给定冗余驱动并联机构2RPU/2UPR参数，求解经优化分配的驱动力模型分布，假设并联机构上下两连杆均为圆柱型杆件，并联机构各结构参数如表1所示。

给定机构动平台绕连续转轴的转动角度α和β范围：[$-\pi/6$，$\pi/6$]和[$-\pi/9$，$\pi/9$]，并向动平台施

表1　机构参数

Tab.1　The parameters of mechanisms　　m

参数名称	符号	数值
定平台Y方向长度	$2a$	0.18
动平台y方向长度	$2h$	0.3
动、定平台初始距离	Z	0.355
支链下连杆长度	l_{i1}	0.14
支链上连杆半径	d_{i1}	0.016
支链下连杆半径	d_{i2}	0.02

加外载荷$\$_F$=(10 N　5 N　10 N；0 N·m　5 N·m 10 N·m)，则冗余驱动并联机构2RPU/2UPR各支链驱动力在给定工作空间内的分配布置如图3所示。

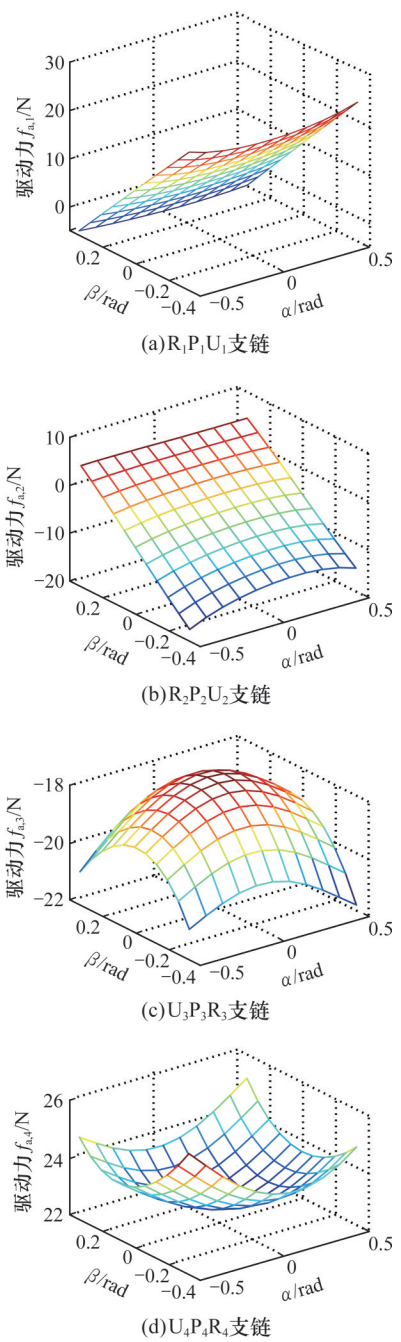


图3　2RPU/2UPR并联机构驱动力分布配置

Fig.3　Driving force distribution of 2RPU/2UPR PM

2 离散界面点位置的对比仿真分析

2.1 模型处理方法

界面点是确定运动副连接位置的节点，同时也是确定边界约束作用位置的节点，可以作为ADAMS软件创建运动副位置的基准。在R副中，运动副接触位置保持不变，但在P副中，运动副接触位置处于动态变化过程，可以通过离散界面点位置创建多界面点模态中性文件用于拟合运动过程。在此基础上，提出一种新的仿真方法并对其进行验证与完善，其过程如图4所示。

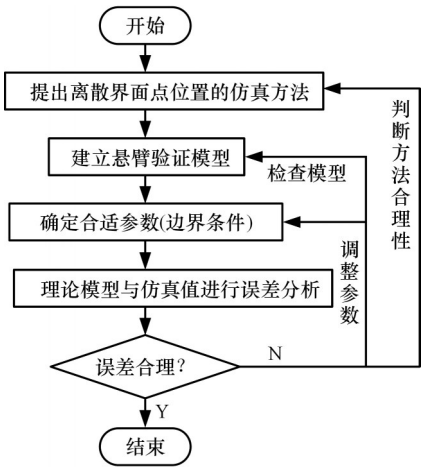


图4 仿真验证流程图

Fig.4 Simulation verification flowchart

以悬臂杆件作为研究模型进行验证，设置杆件横截面直径D为15 mm，杆件长度L为0.2 m，弹性模量E为207 GPa，泊松比μ为0.29，整个杆件以0.02 m/s的速度自右向左水平移动10 s。杆件离散界面点仿真的具体步骤如下：将杆件模型导入ANSYS软件中进行网格划分及柔性化处理，在杆件的端面建立界面点以确定移动副起止位置，然后在杆件两端面之间创建多个等距界面点用以拟合移动副的运动过程，最后输出多界面点杆件，如图5所示。将ANSYS软件处理后的多界面点杆件模态文件导入ADAMS软件进行仿真，在每个界面点对应位置均需创建运动副，然后基于杆件运动状态与边界约束制定每个界面点对应移动副的激活/失效策略，确保移动副连接位置随离散的界面点位置而不断发生变化，进而拟合整个运动过程。

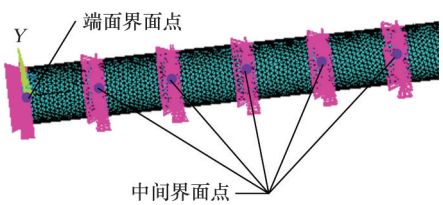


图5 多界面点杆件

Fig.5 Multi-interface point rod

杆件的中间界面点即移动副在运动时经离散后的接触位置。杆件末端形变量可表示为

$$w_B=(FL^3)/(3EI) \tag{9}$$

杆件末端由于悬臂长度的缩短，形变量也逐渐减小，杆件末端形变理论曲线与仿真拟合曲线如图6所示，可知理论值与对应仿真拟合值变化趋势一致且误差控制在4.5%内，误差较为合理。仿真误差受到界面点离散程度的影响，离散界面点密度越大，仿真拟合曲线与理论曲线越趋近于一致，仿真误差越小。

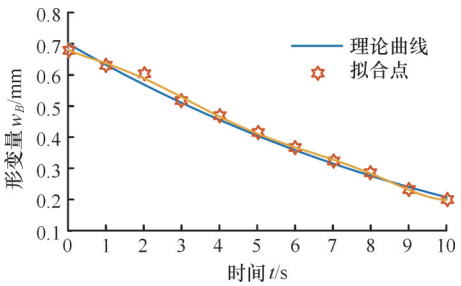


图6 理论曲线与仿真拟合曲线

Fig.6 Theoretical curves and simulation fitting curves

2.2 并联机构力学性能对比分析

对冗余驱动并联机构2RPU/2UPR支链进行柔性化处理，输出支链多界面点模态中性文件，并通过添加运动副构建机构刚体-柔性体混合模型，如图7所示。给定机构动平台运动轨迹：

$$\left.\begin{aligned}P(x)&=0\\P(y)&=0\\P(z)&=0.335+0.05t\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

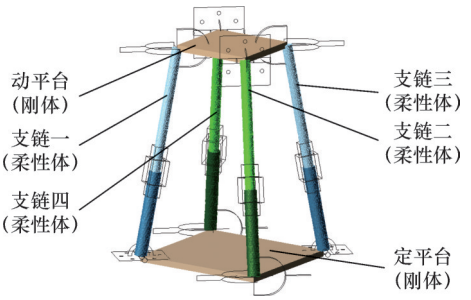


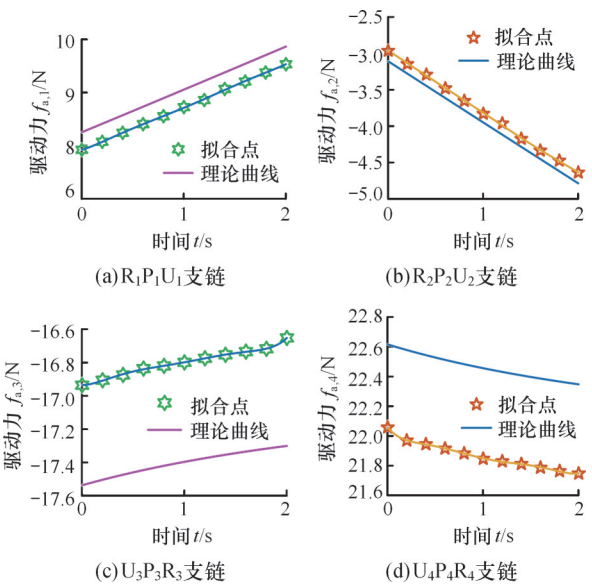
图7 并联机构2RPU/2UPR刚体-柔性体混合模型

Fig.7 The rigid-flexible mixed model of 2RPU/2UPR PM

机构各支链驱动力理论曲线与仿真拟合曲线对比如图8所示，驱动力理论曲线与拟合曲线具备相同的变化趋势，且仿真拟合曲线与理论曲线在各位置间的相对误差均小于5%，验证了理论的正确性。

3 基于支链力学模型的刚度分析

并联机构支链由多个环节串接组成，机构各



(a)$R_1P_1U_1$支链　(b)$R_2P_2U_2$支链

(c)$U_3P_3R_3$支链　(d)$U_4P_4R_4$支链

图8　驱动力理论与仿真拟合对比曲线

Fig.8　Comparison curve of the driving force theory and the simulation fit

支链刚度性能会直接影响机构整体刚度性能。本节通过分析并联机构支链刚度薄弱环节，针对2RPU/UPR机构及2RPU/2UPR冗余驱动机构的力学和刚度性能进行定向分析，在结构设计之前即可判别机构刚度潜能，并基于力学模型进行验证与分析。

如图9所示，并联机构移动副环节通常由导轨和滑块构成，受限于支链结构及机构空间布局，导轨和滑块结构对F方向承载能力较差，该方向即并联机构支链的刚度薄弱环节，对并联机构支链力学性能进行分析，有助于在构型设计阶段规避支链刚度薄弱环节承载较大载荷的情况。

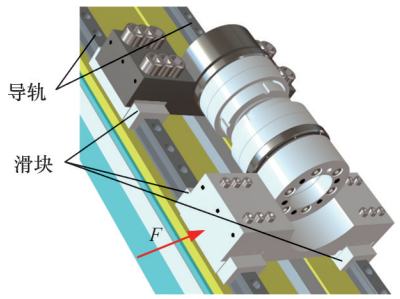
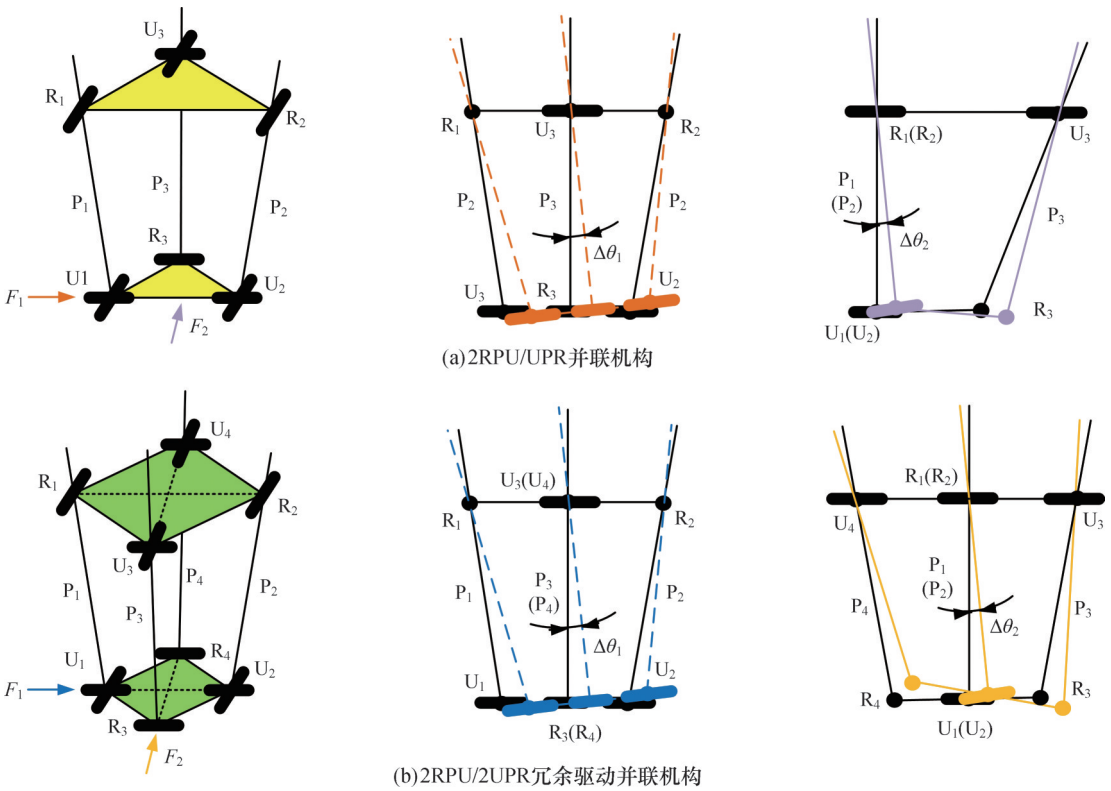


图9　并联机构移动副环节结构设计

Fig.9　Design of the moving joint structure of PMs

2RPU/UPR并联机构与2RPU/2UPR冗余驱动并联机构形变图解分别如图10a和图10b所示，沿动平台y轴方向施加外载荷F_1，此时，由于UPR支链导轨和滑块组成的移动副为支链刚度的薄弱环节，故UPR支链沿受力方向发生形变，并设其沿U副连接定平台轴线产生一定的角位移$\triangle\theta_1$。由于动平台和UPR支链连接处的R副在沿垂直于R副轴线所在方向抗扭转变形能力较强，故可将动平台与UPR支链的形变运动视为同步。两RPU支链沿R副连接定平台轴线产生同



(a)2RPU/UPR并联机构

(b)2RPU/2UPR冗余驱动并联机构

图10　并联机构形变图解

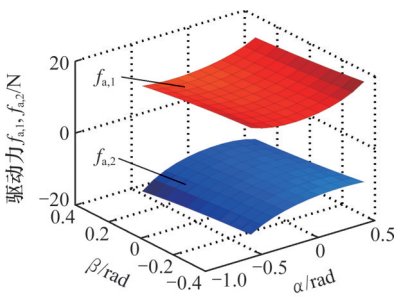
Fig.10　The deformation diagram of PMs

方向的角位移，此时两RPU支链分别处于拉伸和压缩状态，由于支链沿P副方向抵抗拉伸和压缩的形变能力较强，故假设不成立，两并联机构在F_1方向刚度性能具有较好的潜力。

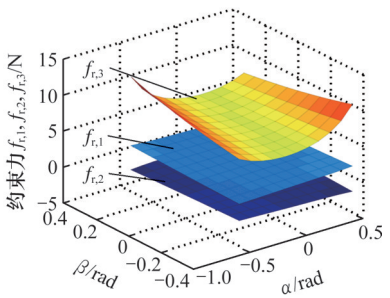
两并联机构RPU支链拉伸和压缩力由驱动力平衡，由于外载荷F_1主要转化成RPU支链的拉伸和压缩力，故RPU支链驱动力相对较大；又由于上述假设不成立，UPR支链几乎不产生角位移形变，故UPR支链的约束力相对较小，而由RPU承担大部分约束力。

为验证上述定向分析的正确性，给定F_1=10 N，并基于上述并联机构参数对2RPU/UPR并联机构与2RPU/2UPR冗余驱动并联机构在给定运动范围内各支链驱动力以及约束力分布情况进行分析，如图11和图12所示。由图11a和图12a可知，两机构驱动力分布情况相近，两RPU支链驱动力方向相反，且由驱动力平衡支链拉伸和压缩力，故支链分别处于拉伸和压缩状态。由图11b和图12b可知，两机构的RPU支链几乎不承担约束力，2RPU/2UPR机构具有两个UPR支链，约束力由两UPR支链共同承担，而2RPU/UPR机构约束力仅由一个UPR支链承担，由于冗余支链的存在，2RPU/2UPR机构相较于2RPU/UPR机构在F_1方向具有更好的理论力学性能表现及刚度潜力。

沿动平台x轴方向施加外载荷F_2，此时由



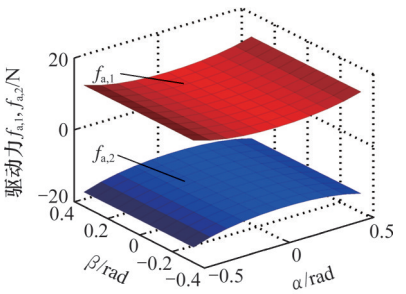
(a)驱动力分布情况



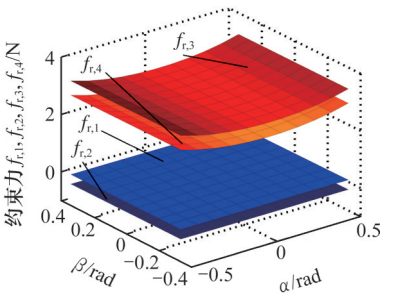
(b)约束力分布情况

图11　外载荷F_1作用下2RPU/UPR并联机构力学性能分布图谱

Fig.11　Mechanical performance distribution diagram of 2RPU/UPR parallel mechanism under external load F_1



(a)驱动力分布情况



(b)约束力分布情况

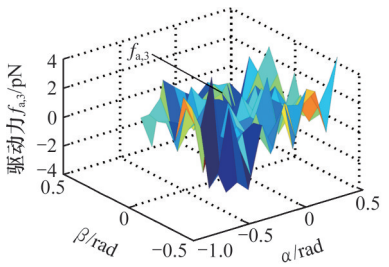
图12　外载荷F_1作用下2RPU/2UPR冗余驱动并联机构力学性能分布图谱

Fig.12　Mechanical performance distribution diagram of 2RPU/2UPR parallel mechanism under external load F_1

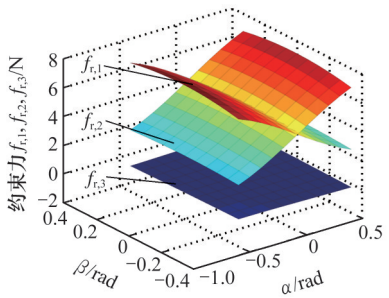
于RPU支链滑块和导轨组成的移动副为支链薄弱环节，故RPU支链发生形变，假设RPU支链沿R副轴线产生一定的角位移$\Delta\theta_2$。由于动平台可以沿着RPU支链U副连接动平台的轴线以及UPR支链R副发生转动，故UPR支链对RPU支链的弯曲形变不起到抵抗作用，即两条RPU支链可以在F_2方向产生弯曲形变，故假设成立，两并联机构在F_2方向的刚度性能潜力相对较差。

在外载荷F_2的作用下，由于UPR支链处于释放状态，并不能起到对角位移$\Delta\theta_2$的抵抗作用，此时主要由两RPU支链约束力平衡动平台外载荷，UPR支链几乎不承担约束力和驱动力。给定F_2=10 N，2RPU/UPR并联机构与2RPU/2UPR冗余驱动并联机构各支链驱动力约束力分布情况分别如图13和图14所示。由图13a和图14a可知，2RPU/UPR机构两RPU支链驱动力微乎其微，2RPU/2UPR机构两RPU支链在β=0°时驱动力为零，驱动力受到动平台转角β的影响，但其值整体较小；由图13b和图14b可知，冗余并联机构2RPU/2UPR约束力主要由两RPU支链承担，两UPR支链仅承担很小一部分约束力，非冗余并联机构2RPU/UPR约束力几乎全部由两RPU支链承担，单个UPR支链几乎不承担约束力。

综上，由于冗余支链的存在，并联机构



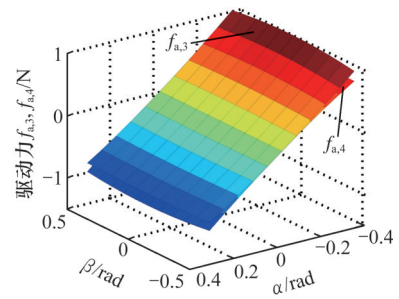
(a)驱动力分布情况



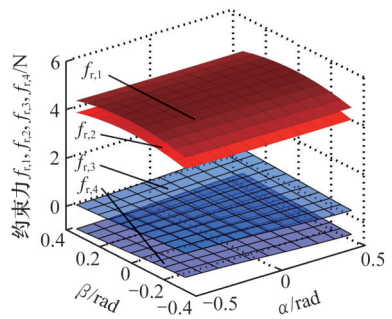
(b)约束力分布情况

图13　外载荷F_2作用下2RPU/UPR并联机构力学性能分布图谱

Fig.13　Mechanical performance distribution diagram of 2RPU/UPR parallel mechanism under external load F_2



(a)驱动力分布情况



(b)约束力分布情况

图14　外载荷F_2作用下2RPU/2UPR冗余驱动并联机构力学性能分布图谱

Fig.14　Mechanical performance distribution diagram of 2RPU/2UPR parallel mechanism under external load F_2

2RPU/2UPR相较于2RPU/UPR在F_1载荷方向与F_2载荷方向刚度性能均有一定提高，且两款机构在F_1方向刚度性能优于F_2方向刚度性能。基于上述支链力学性能的冗余/非冗余并联机构刚度性能分析，在构型设计阶段(无需考虑具体结构)即可对比不同构型并联机构刚度性能潜能，进而基于并联机构实际使用场景折中选择复杂程度与制造成本低、刚度性能优异的并联机构。

4　结论

1)本文基于加权广义逆的方法对非冗余驱动并联机构2RPU/UPR以及冗余驱动并联机构2RPU/2UPR力学性能进行分析，通过规划机构动平台运动范围确定支链约束力空间分布情况。

2)提出一种基于离散界面点的刚体-柔性体混合仿真方法，通过离散整个移动副的运动过程进而拟合机构运动过程中的支链力学性能，为过约束并联机构的力学性能仿真提供一种普适性更强、更加便捷的方法。

3)规划并联机构定平台运动轨迹，基于上述方法建立刚体-柔性体混合仿真模型并进行力学性能对比分析，运动过程力学性能理论曲线与仿真拟合曲线变化趋势相近且误差较小，验证了分析方法的正确性。

4)立足支链刚度薄弱环节，基于支链力学性能对冗余/非冗余驱动并联机构整体刚度性能进行分析，得到支链对机构形变的抵抗作用，进而判别机构刚度潜能。该方法适用于以移动副为驱动且具有对称/半对称结构2R1T冗余/非冗余驱动并联机构小变形场景下刚度性能的定性分析，侧重于在构型设计阶段对不同构型并联机构刚度性能的比较和排序，突出刚度性能评价的前置性。

参考文献：

[1]　赵杰．我国工业机器人发展现状与面临的挑战[J]．航空制造技术，2012，55(12)：26-29.
ZHAO Jie. Development and Challenge of Chinese Industrial Robot[J]. Aeronautical Manufacturing Technology, 2012, 55(12): 26-29.

[2]　HUANG Tian, DONG Chenglin, LIU Haitao, et al. A Simple and Visually Orientated Approach for Type Synthesis of Overconstrained 1T2R Parallel Mechanisms[J]. Robotica, 2019, 37(7): 1161-1173.

[3]　GAN Dongming, DIAS J, SENEVIRATNE L. Unified Kinematics and Optimal Design of a 3rRPS Metamorphic Parallel Mechanism with a Reconfigurable Revolute Joint [J]. Mechanism and Machine Theory, 2016, 96: 239-254.

[4]　JIN Y, BI Z M, LIU H T, et al. Kinematic Analysis and Dimensional Synthesis of Exechon Parallel Kinematic Machine for Large Volume Machining[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2015, 7(4): 041004.

[5]　李秦川，柴馨雪，陈巧红．两转一移三自由度并联机构研究进展[J]．科学通报，2017，62(14)：1507-1519.

LI Qinchuan, CHAI Xinxue, CHEN Qiaohong. Review on 2R1T 3-DOF Parallel Mechanisms[J]. Chinese Science Bulletin, 2017, 62(14): 1507-1519.

[6] ZHANG Jun, ZHAO Y Q, JIN Yan. Elastodynamic Modeling and Analysis for an Exechon Parallel Kinematic Machine[J]. Journal of Manufacturing Science and Engineering, 2016, 138(3): 031011.

[7] DONG C, LIU H, LIU Q, et al. An Approach for Type Synthesis of Overconstrained 1T2R Parallel Mechanisms [M]//Computational Kinematics. Cham: Springer International Publishing, 2017: 274-281.

[8] HAN Jiale, CHENG Hongfei, SHAN Xianlei, et al. A Novel Multi-pulse Friction Compensation Strategy for Hybrid Robots[J]. Mechanism and Machine Theory, 2024, 201: 105726.

[9] XU Yundou, YANG Fan, XU Zhenghe, et al. TriRhino: a Five-degrees-of-freedom of Hybrid Serial - Parallel Manipulator with all Rotating Axes Being Continuous: Stiffness Analysis and Experiments[J]. Journal of Mechanisms and Robotics, 2021, 13(2): 025002.

[10] 王耀军，张海峰，李秦川. Vex4冗余驱动并联机构的动力学建模、力优化及力位混合控制[J]. 机械工程学报，2022, 58(23): 65-74.
WANG Yaojun, ZHANG Haifeng, LI Qinchuan. Dynamics Modeling, Force Optimization and Force/Position Hybrid Control for a Vex4 Redundantly Actuated Parallel Robot[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2022, 58(23): 65-74.

[11] 刘晓飞，陈冉，万波，等. 多冗余驱动并联机构2RPU+2UPR+RPR的动力学建模与控制策略研究[J]. 机械工程学报，2024, 60(11): 237-249.
LIU Xiaofei, CHEN Ran, WAN Bo, et al. Dynamics Analysis and Control Strategy Research of More Redundantly Actuated Parallel Mechanism 2RPU+2UPR+RPR [J]. Journal of Mechanical Engineering, 2024, 60(11): 237-249.

[12] 李永泉，张阳，郭雨，等. 两转一移冗余驱动并联机构构型综合新方法研究[J]. 机械工程学报，2019, 55(23): 25-37.
LI Yongquan, ZHANG Yang, GUO Yu, et al. New Method for Type Synthesis of 2R1T Redundant Driven Parallel Mechanisms[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(23): 25-37.

[13] GOGU G. Mobility and Spatiality of Parallel Robots Revisited via Theory of Linear Transformations[J]. European Journal of Mechanics - A/Solids, 2005, 24(4): 690-711.

[14] 赵雅聪，王启明. 基于FAST馈源支撑系统的索牵引并联机构的力学分析[J]. 机器人，2023, 45(4): 431-438.
ZHAO Yacong, WANG Qiming. Mechanical Analysis on Cable-driven Parallel Mechanism Based on FAST Feed Support System[J]. Robot, 2023, 45(4): 431-438.

[15] 孙鹏，戴显永，李研彪，等. 基于3-RRP并联机构的腕关节设计与分析[J]. 机械工程学报，2023, 59(5): 112-120.
SUN Peng, DAI Xianyong, LI Yanbiao, et al. Design and Analysis of Wrist Joint Based on 3-RRP Parallel Mechanism[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2023, 59(5): 112-120.

[16] XU Yundou, LIU Wenlan, YAO Jiantao, et al. A Method for Force Analysis of the Overconstrained Lower Mobility Parallel Mechanism[J]. Mechanism and Machine Theory, 2015, 88: 31-48.

[17] 张俊，赵艳芹. Exechon并联模块的静刚度建模与分析[J]. 机械工程学报，2016, 52(19): 34-41.
ZHANG Jun, ZHAO Yanqin. Stiffness Modeling and Evaluation for Exechon Parallel Kinematic Machine Module[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(19): 34-41.

[18] YANG Chao, LI Qinchuan, CHEN Qiaohong, et al. Elastostatic Stiffness Modeling of Overconstrained Parallel Manipulators[J]. Mechanism and Machine Theory, 2018, 122: 58-74.

[19] HAN Shukui. Stiffness Analysis of Four Degrees Parallel Manipulator[J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2006, 42: 31.

[20] 艾青林，黄伟锋，张洪涛，等. 并联机器人刚度与静力学研究现状与进展[J]. 力学进展，2012, 42(5): 583-592.
AI Qinglin, HUANG Weifeng, ZHANG Hongtao, et al. Review of Stiffness and Statics Analysis of Parallel Robot [J]. Advances in Mechanics, 2012, 42(5): 583-592.

（编辑 陈 勇）

作者简介：徐郑和*（通信作者），男，1994年生，讲师。研究方向为机构学理论、机器人学及智能制造。E-mail: 2022055@imust.edu.cn。

本文引用格式：

徐郑和，杨高炜，卢昌亨，等. 基于支链力学模型的冗余/非冗余过约束2R1T并联机构刚度性能对比分析[J]. 中国机械工程，2026, 37(8): 1909-1916.

XU Zhenghe, YANG Gaowei, LU Changheng, et al. Comparative Analysis of Stiffness Properties of Redundant/Non-redundant Over-constrained 2R1T PMs Based on the Mechanical Models of Limbs[J]. China Mechanical Engineering, 2026, 37(8): 1909-1916.